**7. Случайные величины и их распределения.**

**I. Дискретные случайные величины**

Дискретной называется случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений, . Согласно определению случайной величины, множества являются событиями. Набор вероятностей

Называется распределением вероятностей случайной величины ξ. Числа

предполагаются различными, тогда события попарно несовместны и в сумме составляют достоверное событие , следовательно,

**Пример 7.1.** Вероятность ошибки при передаче сообщения по каналу связи равна *p*. Для борьбы с ошибками сообщение передается 5 раз, оно считается принятым правильно, если число ошибочных экземпляров не превышает 2. Считая ошибки в канале независимыми, построить распределение случайной величины , равной числу ошибочных копий; найти вероятность правильного приема сообщения.

Применяя схему Бернулли с *n* = 5 и заданным *p*, получаем

Функция распределения этой случайной величины имеет вид ступеньчатой функции, слева от 0 она равна 0, в каждой точке имеет скачок величины , так что Вероятность правильного приема равна , например, при *p* = 0,3 эта вероятность составляет 0,837.

***Биномиальное распределение*** есть распределение целочисленной случайной величины , равной числу успехов в схеме Бернулли (см. параграф 5) с числом испытаний *n* и вероятностью успеха *p*:

***Геометрическое распределение*.** Предположим, в условиях схемы Бернулли испытания проводятся до наступления первого успеха и пусть обозначает номер испытания, в котором наступил первый успех. Событие означает, что вначале было подряд неуспехов, а затем успех; вследствие независимости испытаний вероятность такой последовательности равна произведению вероятностей, так что

*, k =1,2,3,…*

Это и есть геометрическое распределение.

Проверим, что для него выполнено условие нормировки, то есть сумма всех вероятностей равна 1. Обозначая для краткости , запишем

здесь использована формула для суммы геометрической прогрессии:

**Распределение Пуассона.** Теорема Пуассона в схеме Бернулли (Теорема 5.1.) привела к следующему дискретному распределению:

Условие нормировки для него легко проверяется:

поскольку сумма справа есть разложение экспоненты в ряд Тейлора.

**Пример 7.1.** Геометрическое распределение возникло как распределение числа испытаний до первого успеха. Рассмотрим теперь случайную величину , равную числу испытаний до – го успеха (

Cлучайная величина принимает значение на такой последовательности длины , состоящей из нулей и единиц, которая заканчивается единицей, а на предыдущих позициях расположены нулей и единиц. Вероятность получить такую последовательность в серии независимых испытаний равна , а общее число таких последовательностей есть следовательно,

.

Проверим условие нормировки для этого распределения:

выполнив замену переменной , получим

Сумма в скобках, как легко убедиться, представляет собой разложение в ряд Тейлора дроби =, откуда и следует равенство единице всей суммы вероятностей.

**II. Непрерывные случайные величины**

**Определение.** Плотностью распределения случайной величины, принимающей значения на некотором интервале вещественной оси, называется функция, обозначаемая далее , такая что для любых *a < b*

Из этого определения и свойств интеграла Римана следует:

1). ;

2). в точках непрерывности функции

3). для любого интервала (*a, b]*

Если существует плотность, то говорят, что распределение является абсолютно непрерывным. Плотность распределения является неотрицательной функцией, для которой выполнено ***условие нормировки***:

которое получается из предыдущей формулы при .

Рассмотрим некоторые простые примеры абсолютно непрерывных распределений (далее в тексте абсолютно непрерывное распределение будем называть просто непрерывным).

**Равномерное распределение.** Для равномерного распределения на интервале [*a, b*] плотность принимает постоянное значение на этом интервале и равна нулю вне его. Если обозначить *с* это постоянное значение, то согласно условию нормировки, , откуда получаем значение константы; таким образом, равномерное распределение имеет плотность

соответствующая функция распределения

Наиболее часто применяется равномерное распределение на интервале [0*,* 1]:

**Экспоненциальное распределение.** Рассмотрим случайную величину , принимающую неотрицательные значения, с функцией распределения

Вероятность , как показано в параграфе 4, соответствует свойству отсутствия памяти; если имеет смысл времени ожидания, то вероятность того, что придется ждать еще время *τ* при условии, что ждем уже *t*, от *t* не зависит:

Экспоненциальное распределение имеет плотность

**Пример 7.2.** Медианой распределения вероятностей называется число *m*, удовлетворяющее условию Физики называют *m* периодом полураспада: пусть – время жизни нестабильного атомного ядра; поскольку модель радиоактивного распада ядер обладает свойством отсутствия памяти, то за время *m* распадется половина имеющейся массы вещества. Предположим, экспериментально установлено, что период полураспада равен *T* лет, тогда для экспоненциального распределения из равенства получаем

В лингвистике существует точка зрения, что слова языка живут по тому же закону, что и ядра атомов радиоактивного вещества: вероятность того, что слово проживет время *x*, соответствует экспоненциальному распределению. Предположим, установлено, что период полураспада базового словарного состава для некоторых древних языков составляет 2000 лет. Рассмотрим гипотезу о том, что венгерский и финский языки произошли от одного языка; если статистические оценки показывают, что два языка имеют 21% общих слов, то сколько лет назад эти языки разделились?

Обозначим этот срок , тогда получаем уравнение: *,* откуда решая относительно и заменяя через период полураспада, находим

По другой оценке, два языка имеют 27% общих слов.

**Пример 8.3.** Типичная простая задача из учебников на вычисления, связанные с респределением случайной величины. Пусть задана плотность распределения

Найти постоянную *с*, построить функцию распределения и вычислить вероятность .

Константу находим из условия нормировки:

Функция распределения тогда равна

И с помощью свойства 3). функции распределения находим

Самостоятельно построить графики функции и плотности распределения.